Tema 3. Circuitos capacitivos

1. Introducción

Hasta ahora hemos visto cómo analizar circuitos resistivos, es decir, compuestos por resistencias y fuentes. En este tema presentaremos un nuevo elemento de circuito llamado condensador. La aplicación de los circuitos resistivos es bastante limitada, sin embargo, con la introducción de los condensadores seremos capaces de analizar circuitos más importantes y prácticos.

No debe de perderse de vista que las técnicas de resolución de circuitos estudiadas en los temas 1 y 2 siguen siendo válidas para los circuitos con condensadores.

2. Interruptores

Antes de pasar a explicar los condensadores presentaremos un nuevo elemento: el interruptor.

Un *interruptor* tiene dos estados diferentes: abierto y cerrado. En el caso ideal, un interruptor es un cortocircuito cuando está cerrado y un circuito abierto cuando está abierto.

En la figura 1a se muestra el símbolo de un interruptor. Se puede ver que se indica el instante de tiempo en el que interruptor cambia de estado ($t=t_1$), y el sentido de la flecha indica a que estado pasa en el instante t_1. De forma que el interruptor de la figura 1a está abierto para $t<t_1$ y cerrado para $t>t_1$.

Existen otras posibilidades. Por ejemplo, el interruptor de la figura 1b está cerrado para $t<t_1$ y abierto para $t>t_1$. El interruptor 1c mantiene los nodos A y C conectados para $t<t_1$ y conecta los nodos C y B para $t>t_1$.

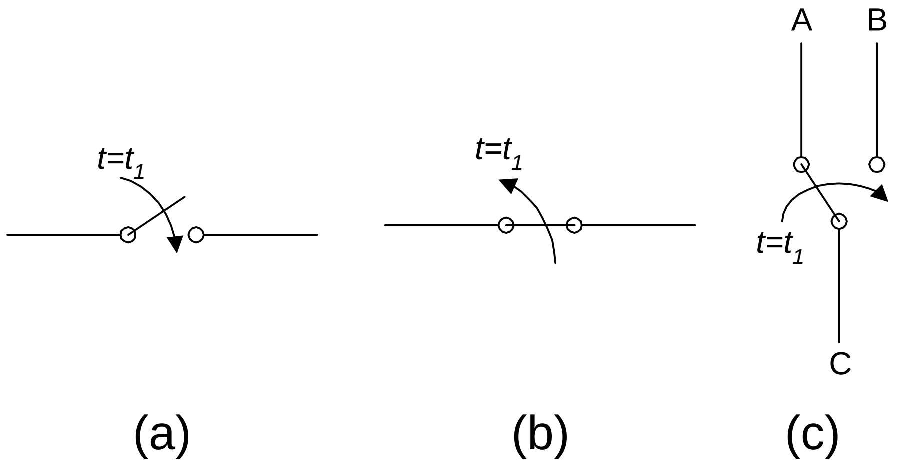

Figura 1. Símbolo de un interruptor.

3. Condensadores

Después de las resistencias, los condensadores suelen ser los elementos más comunes en un circuito. Un condensador es un elemento de dos terminales diseñado para almacenar energía por medio de su campo eléctrico.

Un condensador está compuesto por dos placas conductoras separadas entre sí por un aislante (figura 2). En la figura 3 se puede ver el símbolo de un condensador.

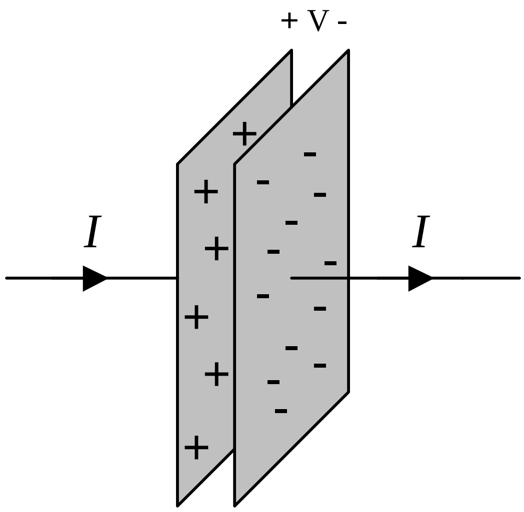

Figura 2. Condensador.

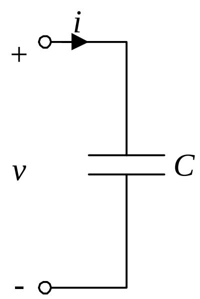

Figura 3. Símbolo de un condensador.

Si existe una cierta intensidad *I* en un condensador, esa intensidad provoca que se cargue positivamente una de las placas y la otra negativamente. La carga +*q* de una placa será siempre idéntica a la –*q* de la otra.

En un condensador, la tensión *v* existente entre sus placas será siempre proporcional a la carga almacenada en ellas, de forma que:

$$q = Cv$$

[1]

q: Carga almacenada en las placas.
v: Tensión entre las placas.
C: Valor del condensador medido en F (F=C/V).

El valor *C* de un condensador depende exclusivamente de las características geométricas del mismo.

Para obtener la característica I-V del condensador sólo tenemos que derivar a ambos lados de la ecuación [1], obteniéndose:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dCv}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = C\frac{dv}{dt}$$

[2]

i: Intensidad a través del condensador.
v: Tensión entre las placas.
C: Valor del condensador medio en F (F=C/V).
v: Tensión entre las placas.
C: Valor del condensador.

Esta ecuación es válida para las referencias de tensión e intensidad indicadas en la figura 3.

De acuerdo con la ecuación anterior, cuando un condensador conduzca corriente, su tensión debe variar, ya que su derivada es distinta de cero. Sin embargo, cuando la tensión es constante, la intensidad a través del condensador siempre es nula.

Si integramos a ambos lados de la ecuación [2], obtenemos la siguiente relación:

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\, dt$$

o bien,

$$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt + v(t_0)$$

Se puede ver, que la tensión en un condensador en un instante *t* depende de la intensidad que ha pasado por el condensador anteriormente al instante *t*. Por tanto, un condensador tiene "memoria". Esta propiedad es muy utilizada en algunos circuitos.

Como conclusiones importantes citaremos dos:

1. Cuando la tensión de un condensador se mantiene constante, su intensidad es nula.
2. La tensión de un condensador nunca cambia de forma instantánea, ya que esto implicaría una corriente infinita. Por tanto, una tensión como la de la figura 4 es imposible en un condensador.

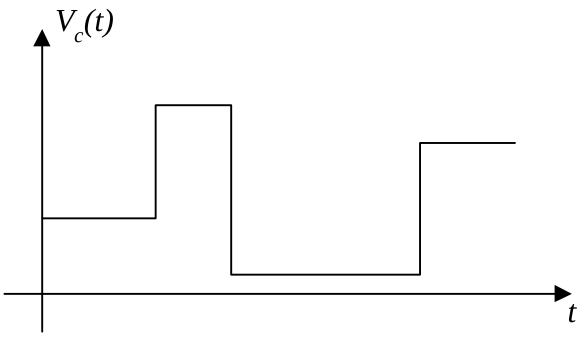

Figura 4. Variación instantánea de la tensión de un condensador.

<u>Ejemplo 1</u>. La tensión de un condensador de valor 1μF está representada en la figura 5. ¿Cómo será su intensidad y su carga en función del tiempo?.

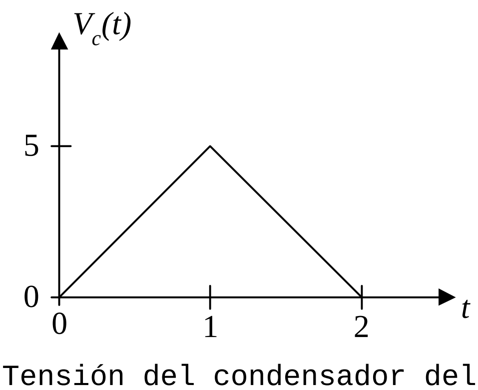

Figura 5. Tensión del condensador del ejemplo 1.

La carga de un condensador es proporcional a su tensión (q=Cv), por tanto, la carga en función del tiempo estará representada en la figura 6a.

La intensidad es igual a:

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = (1\mu F)\frac{dv}{dt}$$

La intensidad se representa en la figura 6b.

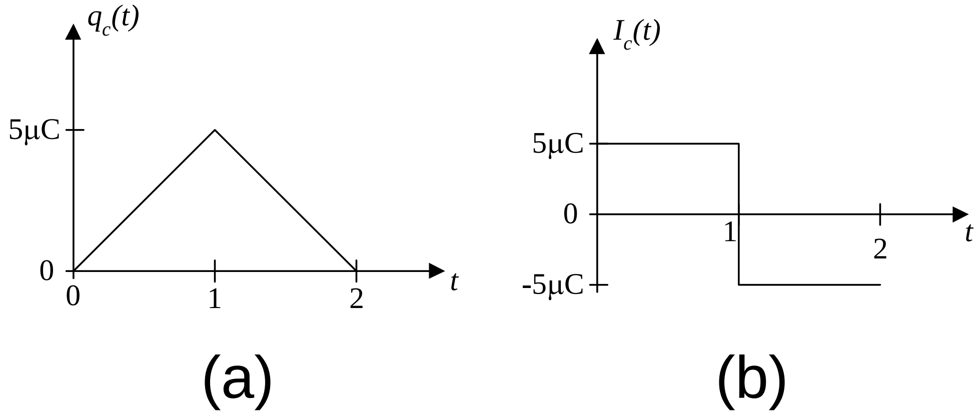

Figura 6. Solución del ejemplo 1.

3.1. Asociación de capacidades.

Vimos en el tema anterior que la asociación en serie y paralelo es una herramienta muy poderosa para simplificar circuitos. Veremos cómo se realizan estas asociaciones con condensadores.

Condensadores en paralelo

El valor del condensador equivalente (C_{eq}) de N condensadores conectados en paralelo (C_1, C_1,... C_N) es la suma de los valores individuales (figura 7).

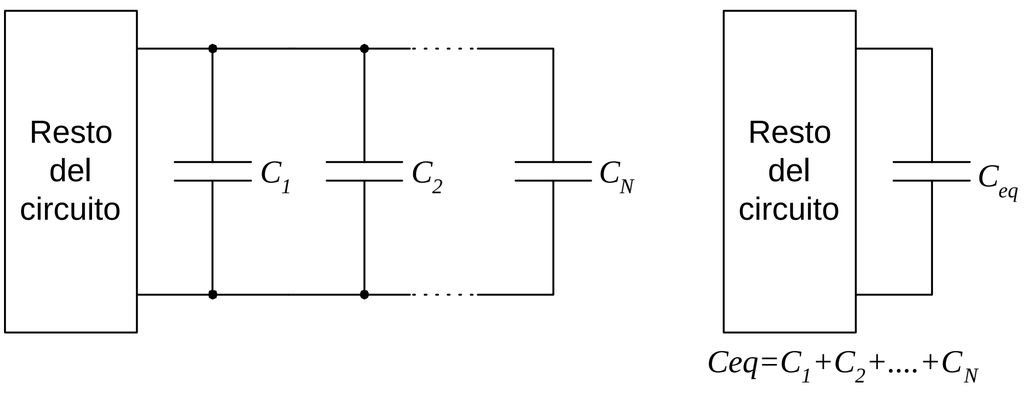

Figura 7. Condensadores en paralelo.

Condensadores en serie

La capacidad equivalente (C_{eq}) de N condensadores conectados en serie (C_1, C_1,... C_N) sigue la siguiente expresión (figura 8):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

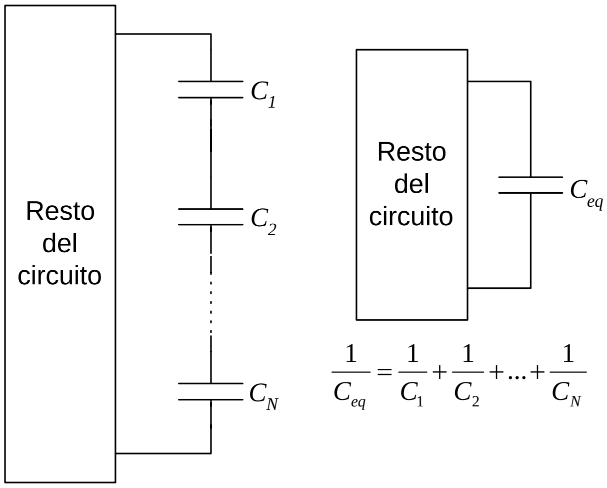

Figura 8. Condensadores en serie.

Ejercicio 1: Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura 9.

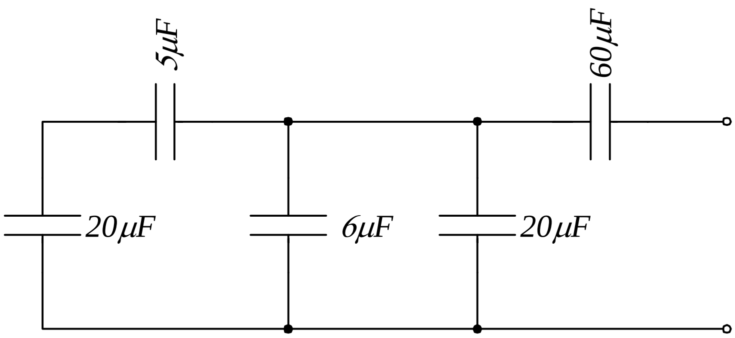

Figura 9. Circuito del ejercicio 1.

Solución: 20μF

4. Circuito RC sin fuente

Estudiaremos el circuito de la figura 10, es decir, un condensador de valor C conectado a una resistencia de valor R. La tensión inicial del condensador vale V_0 , esto significa que:

$$V_C(t)\big|_{t=0} = V_C(0) = V_0$$

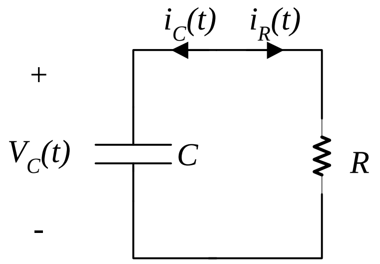

Figura 10. Circuito RC .

Veremos cómo es la tensión del condensador $V_C(t)$ en función del tiempo. Aplicando la ley de Kirchhoff:

$$i_C + i_R = 0 \quad \Rightarrow \quad C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_C(t)}{R} = 0$$

Integrando:

$$V_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

Se puede ver que la tensión en el condensador va disminuyendo de forma exponencial hasta llegar a cero. En la figura 11 se puede ver la representación gráfica de la tensión del condensador.

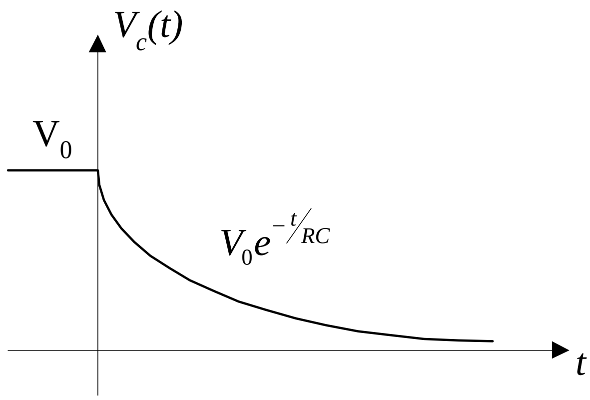

Figura 11. Tensión en el condensador.

Se define $\tau = RC$ como la *constante de tiempo*, e indica la rapidez con la que disminuye la tensión del condensador.

Para resolver un circuito con un condensador y resistencias se siguen los siguientes pasos:

a. Determinar la tensión inicial en el condensador. (V_0)

En el próximo apartado se explicará cómo determinar la tensión inicial en un condensador en condiciones estáticas.

b. Calcular la constante de tiempo ($\tau = RC$), de forma que $V_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$.

Para determinar la constante de tiempo obtendremos el equivalente Thévenin entre los terminales de la capacidad. Es decir, eliminaremos la capacidad y encontraremos la resistencia equivalente entre sus terminales.

Ejemplo 2. Determinar la tensión en el condensador (V_C) y la intensidad (I_C) a los cinco segundos en el circuito de la figura 11. La tensión inicial del condensador es de V_0=10V.

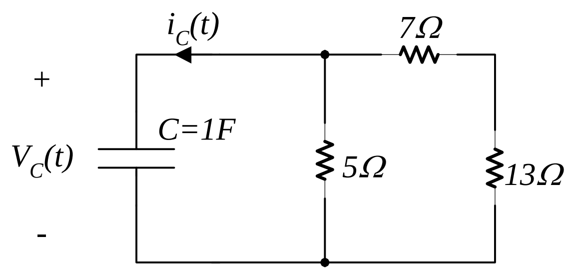

Figura 12. Circuito del ejemplo 2.

Antes de comenzar transformaremos el circuito de la figura 12 en el de la figura 13(b). Para ello calcularemos el equivalente Thévenin del circuito de la figura 13(a).

La resistencia Thévenin vale:

$$R_{eq}=R_{th}=4\Omega$$

Por tanto, la tensión en el condensador es:

$$V_C(t) = V_0 e^{-t/RC} = 10e^{-t/4}$$

La tensión a los cinco segundos vale $V_C(5) = 10e^{-5/4} \quad V$.

La intensidad: $I_C(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt} = -\dfrac{10}{4}e^{-t/4} \quad \Rightarrow \quad I_C(5) = -\dfrac{10}{4}e^{-5/4}$.

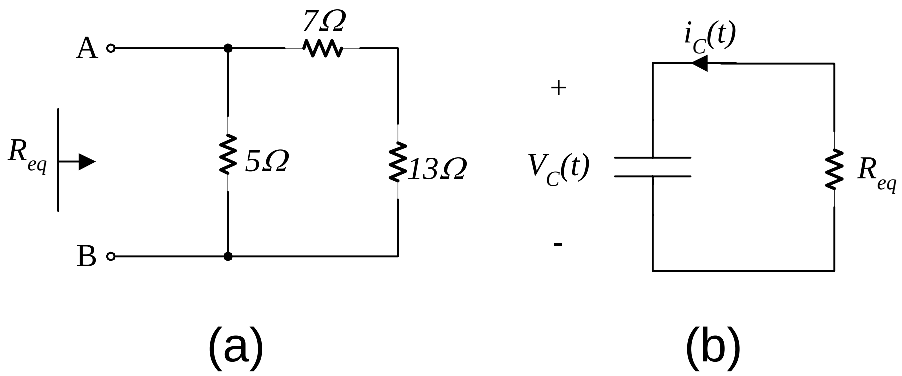

Figura 13. Resolución del ejemplo 2.

5. Condiciones iniciales en los circuitos conmutados

En este apartado nos centraremos en determinar la tensión inicial de un condensador, cuando en el circuito hay uno o más interruptores.

Se considera que el instante de accionar el interruptor es $t=0$, y se desea determinar el valor de la tensión del condensador en $t=0^-$. Se supondrá que los interruptores del circuito se han mantenido en la posición inicial durante largo tiempo antes de $t=0$ (momento de la conmutación).

Si en el circuito sólo existen fuentes independientes de valor constante, tras este largo tiempo se habrá llegado a condiciones estáticas, es decir, todas las tensiones e intensidades del circuito son constantes.

Ya hemos visto que cuando la tensión en un condensador es constante, la corriente que circula por éste es nula, comportándose como un circuito abierto. Por tanto, para calcular la tensión en $t=0^-$ sustituiremos el condensador por un circuito abierto.

Puesto que la tensión en un condensador no puede cambiar de forma instantánea, se tiene que la tensión inicial del condensador vale:

$$V_0 = V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

Ejemplo 3. Determinar la tensión del condensador $V_C(t)$ en función del tiempo para el circuito de la figura 14.

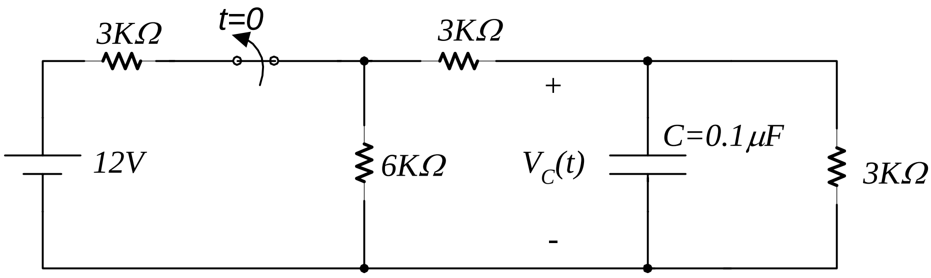

Figura 14. Circuito del ejemplo 3.

6. Respuesta al escalón de un circuito RC

Estudiaremos el circuito de la figura 15a, compuesto por un condensador con tensión inicial V_0, una resistencia de valor R. En el instante *t=0* el interruptor conecta la fuente independiente de tensión a la resistencia, pasando a circuito de la figura 15b.

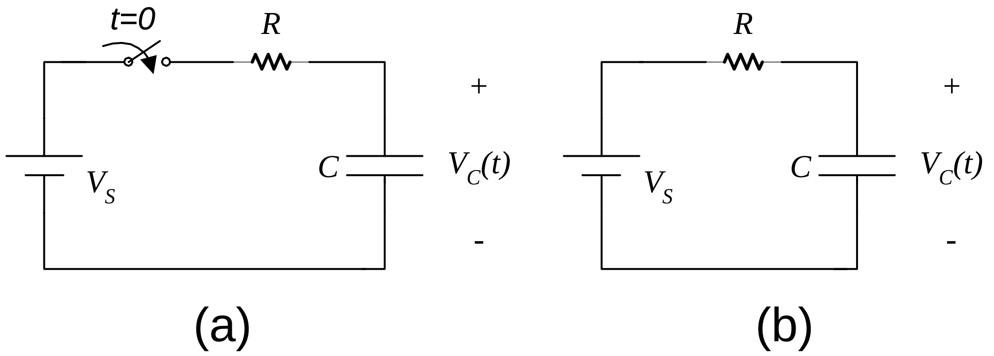

Figura 15. Circuito para calcular la respuesta al escalón.

La intensidad en la resistencia vendrá dada por:

$$i_R(t) = \frac{V_S - V_C(t)}{R}$$

Por tanto:

$$i_R(t) = i_C(t) = \frac{V_S - V_C(t)}{R} = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial de primer orden obtenemos la siguiente expresión para la tensión del condensador:

$$V_C(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/RC}$$

Por tanto, el valor final de la tensión del condensador (t=∞) es V_S, como puede verse en la figura 16.

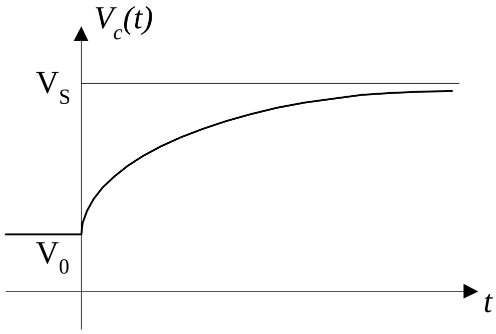

Figura 16. Respuesta al escalón de un circuito RC.

Si llamamos V_∞ a la tensión V_S, y definimos la constante de tiempo como $\tau = RC$, podemos escribir la ecuación de la tensión del condensador como:

$$V_C(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty)e^{-t/\tau}$$

Para resolver un circuito con condensadores, interruptores y fuentes se siguen los siguientes pasos:

i. Se calcula la tensión inicial del condensador. Normalmente se impondrán condiciones estáticas.
ii. Se determina el equivalente Thévenin entre los terminales del condensador, siendo:

$$V_\infty = V_{th}$$
$$\tau = CR_{th}$$

Ejemplo 4. Calcular la tensión en el condensador *$V_C(t)$* en el circuito de la figura 17 para:

(a) *t=0*.

(b) t≥0.

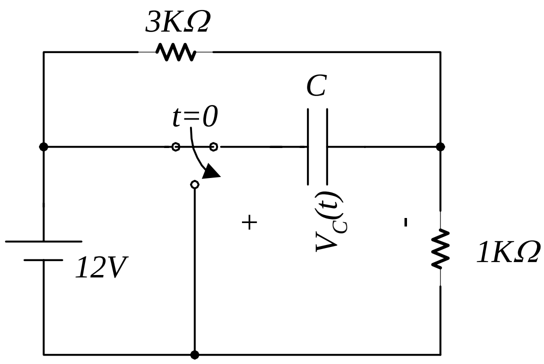

Figura 17. Circuito para el ejemplo 4.

Ejercicio 2. Encontrar *i(t)* para t=0$^-$ y t≥0$^+$ en el circuito de la figura 19.

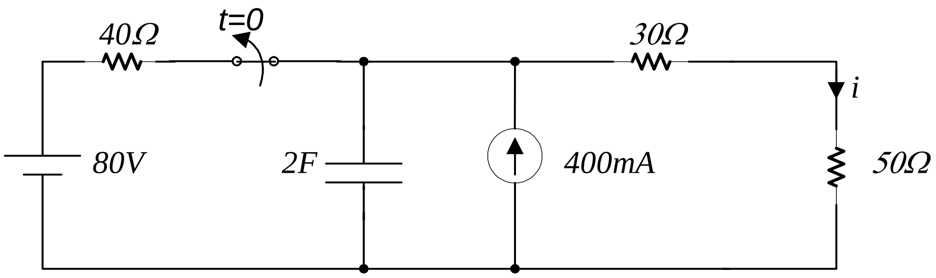

Figura 19. Circuito para el ejercicio 2.

Solución: t=0$^-$ ➔ $i=0.8\ A$

t≥0$^+$ ➔ $i(t)=0.4+0.4e^{-t/160}\quad A$