Una introducción a los politopos y a la computación poliédrica, con aplicaciones

Antonio Luque Estepa
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla
aluque@bart.us.es

9 de diciembre de 1999

Resumen

Se presentan las definiciones más importantes relativas a los politopos y poliedros, así como a las envolturas conexas de subespacios de $\mathbf{R}^d$. Se enumeran (sin demostrar) algunas propiedades y teoremas relevantes a estos objetos. Por último se mencionan algunas de las aplicaciones de politopos y combinaciones convexas, tales como programación lineal y sistemas de control borroso.

1 Definiciones

Definición 1 *Un subconjunto P de $\mathbf{R}^d$ es un poliedro convexo si es el conjunto de soluciones de un sistema finito de inecuaciones, y es un politopo convexo si es un poliedro convexo y además está acotado. Cuando un poliedro (o politopo) convexo tiene dimensión k, se dice que es un k-poliedro (k-politopo) [1].*

Se tiene que un politopo es la generalización al espacio d-dimensional del concepto de poliedro. A partir de ahora podremos omitir el adjetivo convexo, y llamaremos poliedro y politopo a los poliedros convexos y politopos convexos respectivamente.

Sea P un d-poliedro convexo (o d-politopo convexo) en $\mathbf{R}^d$.

Definición 2 *Para un d-vector real c y un número real d, se dice que una desigualdad lineal $c^T x \leq d$ es válida para P si se cumple que $c^T x \leq d$ para todo $x \in P$. Un subconjunto F de un poliedro P es una cara de P si se puede representar como*

$$F = P \cap \{x : c^T x = d\}$$

para alguna desigualdad válida $c^T x \leq d$.

Las caras se pueden definir geométricamente usando hiperplanos. Un hiperplano h de $\mathbf{R}^d$ está soportando a P si uno de los semiespacios cerrados de h contiene a P. U subconjunto F de P es una cara de P si es el conjunto vacío, el mismo P, o la intersección de P con un hiperplano que lo soporta.

Las caras de dimensión 0, 1, d-2 y d-1 se llaman *vértices*, *aristas*, *crestas* y *facetas*, respectivamente. Los vértices coinciden con los *puntos extremos* de P, que se definen como puntos que no pueden ser representados como la combinación convexa de otros dos puntos de P.

Definición 3 *Para un subconjunto S de $\mathbf{R}^d$, la envoltura* [1] *convexa $Co(S)$ se define como el conjunto convexo más pequeño de $\mathbf{R}^d$ que contiene a S.*

La manera más normal de interpretar $Co(S)$ es como la intersección de semiespacios, o, más exactamente, como un conjunto de soluciones a un sistema mínimo de desigualdades lineales. Así se obtiene una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times d}$ y un vector $b \in \mathbf{R}^m$ para un cierto m, tales que $Co(S) = \{x|Ax \leq b\}$.

A partir de esta interpretación de $Co(S)$ se observa fácilmente que un politopo puede definirse como la combinación convexa de N puntos en $\mathbf{R}^d$.

2 Propiedades

A continuación se enumeran algunas de las propiedades más comúnmente usadas de poliedros y politopos. Se omiten todas las demostraciones, que se dejan al lector interesado.

Definición 4 *Para dos subconjuntos P y Q de $\mathbf{R}^d$, $P + Q$ denota la suma de Minkowski de P y Q, y se define como*

$$P + Q = \{p + q : p \in P, q \in Q\}$$

Teorema 1 *Cada poliedro se puede expresar como la suma de Minkowski de un politopo convexo (generado por sus puntos $a, b, c, \ldots$) y un cono $(r, s, t, \ldots)$. Si el poliedro es acotado (ie, es un politopo), entonces el cono está vacío [2].*

Supongamos que el politopo reside en un d-espacio V. Para obtener una visión unificada de las secciones politópica y cónica del poliedro, incluimos V como un subespacio afín de un $(d + 1)$-espacio W, de forma que la imagen de W contenga el punto $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ y sea paralela al subespacio generado por los últimos d vectores unitarios.

Teorema 2 (Minkowski-Weyl) *Para un subconjunto P de $\mathbf{R}^d$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es un poliedro, ie, para alguna matriz real finita A y un vector real b, $P = \{x : Ax \leq b\}$.*
2. *Existen unos vectores finitos reales $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pertenecientes a $\mathbf{R}^d$, tales que $P = Co(v_1, v_2, \ldots, v_n) + nonneg(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.*

El teorema de Minkowski-Weyl establece que cada poliedro o politopo es generado finitamente.

Cada poliedro tiene dos representaciones, de tipo 1 y 2, conocidas como representación H (*halfspace*), y representación V (vértices).

Se puede demostrar que los teoremas 1 y 2 son equivalentes.

[1] No conozco el término castellano exacto para referirse a esta estructura. He traducido *hull* por "envoltura". Me parece más correcto este término que "casco", que es su traducción literal.

3 Aplicaciones

3.1 Computación poliédrica

La computación poliédrica trata de determinar numéricamente ciertas propiedades de los poliedros y politopos definidos de una manera concreta.

La computación de la envoltura convexa tiene como objeto la determinación de $Co(S)$ para un conjunto finito dado de n puntos $S = \{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ en $\mathbf{R}^d$.

Dado un conjunto S de n diferentes puntos de $\mathbf{R}^d$, el diagrama de Voronoi es la partición de $\mathbf{R}^d$ en regiones poliédricas $vo(p)$ con $p \in S$. Cada región $vo(p)$ es conocida como la *celda de Voronoi* de p y se define como el conjunto de puntos en $\mathbf{R}^d$ que están más cerca de p que de cualquier otro punto de S. O más formalmente:

$$vo(p) = \{x \in \mathbf{R}^d | dist(x,p) \leq dist(x,q) \forall q \in S - p\}$$

donde $dist$ es la función de distancia euclídea (aunque se podrían usar otras distancias para definir diagramas de Voronoi).

Tanto los diagramas de Voronoi como las triangulaciones de Delaunay (no discutidas aquí) tienen interés en problemas de programación lineal.

3.2 Programación lineal

Un problema de programación lineal (PL en adelante) tiene como objetivo encontrar un mínimo o máximo de una función lineal sujeta a restricciones de tipo desigualdad lineal. Formalmente:

$$\max \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j x_j \tag{1}$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

donde $A = [a_{ij}]$ es una matriz racional $m \times d$ dada, $c = [c_j]$ y $b = [b_i]$ son vectores racionales de dimensión d y m respectivamente.

Los problemas de PL son resolubles numéricamente usando métodos como el símplex, o el método de los puntos interiores [3] [4].

3.3 Sistemas dinámicos

Un sistema se define como una transformación entre una señal de entrada $u(t)$ y una salida $y(t)$. El sistema es dinámico si la salida $y(t)$ depende de los valores de la entrada en tiempos pasados [5].

Un sistema dinámico admite una representación interna si su estado queda completamente definido por un vector x (que supondremos de dimensión finita), que evoluciona según la entrada y del que se puede obtener la salida [6].

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3}$$

$$y = g(x, u) \tag{4}$$

Se dice que el sistema es lineal si tanto f como g son funciones lineales de x y u. Normalmente g no depende de u y en adelante trataremos con sistemas de la forma $y = g(x)$.

Como y sólo depende de x es equivalente conocer una u otra. Un sistema con representación interna queda definido conociendo la evolución del estado $x(t)$.

Un sistema de inferencia borrosa (FIS: *fuzzy inference system*) lineal de tipo Takagi-Sugeno está compuesto por M reglas de la forma

$$R_i : \quad \text{SI} \quad x \quad \text{ES} \quad L_i \quad \text{ENTONCES} \quad \dot{x} = A_i x + B_i u, \quad i = 1, \ldots, M \tag{5}$$

Esto es equivalente al sistema

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i(x) A_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^{M} w_i(x) B_i \right) u \tag{6}$$

Donde las $w_i(x)$ son los pesos borrosos de cada regla, que se calculan como:

$$w_i(x) = \frac{\mu_{L_i}(x)}{\sum_{j=1}^{M} \mu_{L_j}(x)} \tag{7}$$

En esta ecuación $\mu_{L_i}(x)$ es la función de pertenencia de x al conjunto borroso L_i, que se define a partir de las funciones de pertenencia de cada componente x_k a un conjunto borroso $A_i^{(k)}$ como:

$$\mu_{L_i}(x) = \prod_{k=1}^{n} \mu_{A_i^{(k)}}(x_k) \tag{8}$$

Puesto que las w_i toman valores en el intervalo $[0, 1]$ y $\sum_{i=1}^{M} w_i(x) = 1$, el sistema (6) satisface las condiciones de convexidad y se puede considerar como una inclusión diferencial lineal politópica [7].

El sistema (6) se puede escribir como:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{9}$$

donde

$$[A(t) \quad B(t)] \in Co([A_1 \quad B_1], [A_2 \quad B_2], \ldots, [A_n \quad B_n]) \tag{10}$$

Se ve que el análisis de estabilidad tanto de un sistema Takagi-Sugeno sin controlar como controlado con realimentación lineal (no borrosa) del vector de estado se puede reducir al análisis de estabilidad de una inclusión lineal diferencial politópica [8],[9],[10].

Referencias

[1] Komei Fukuda, *Frequently asked questions in polyhedral computation*, Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

[2] Ewgenij Gawrilow, Michael Joswig, Algorithmic and Discrete Mathematics Department, Technical University of Berlin.

[3] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[4] V. Chvatal, *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, 1983.

[5] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Prentice-Hall, 1980.

[6] M. Gopal, *Modern control system theoy*, Wiley Eastern Limited, 1984.

[7] AICIA, Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla, *Practical methods for stability asessment of fuzzy MIMO control systems*, FAMIMO project, ESPRIT programme, Deliverable D1.6b, 1998.

[8] K. Tanaka y M. Sugeno, *Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control*, IEEE Trans. in Syst. Man. Cybern, 15, 1985.

[9] J. Zhao, *System modelling, identification and control using fuzzy logic*, PhD thesis, Université Catholique de Louvain.

[10] K. Tanaka *et al.*, *Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabizability, H_∞ control theory and linear matrix inequalities*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 4(1), 1996.