

Tema 6. Comportamiento Frecuencial

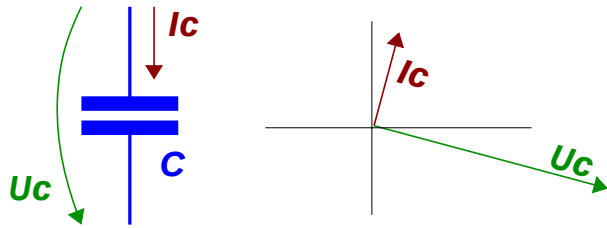
- Introducción
- Respuesta AF
- Respuesta BF

Bibliografía

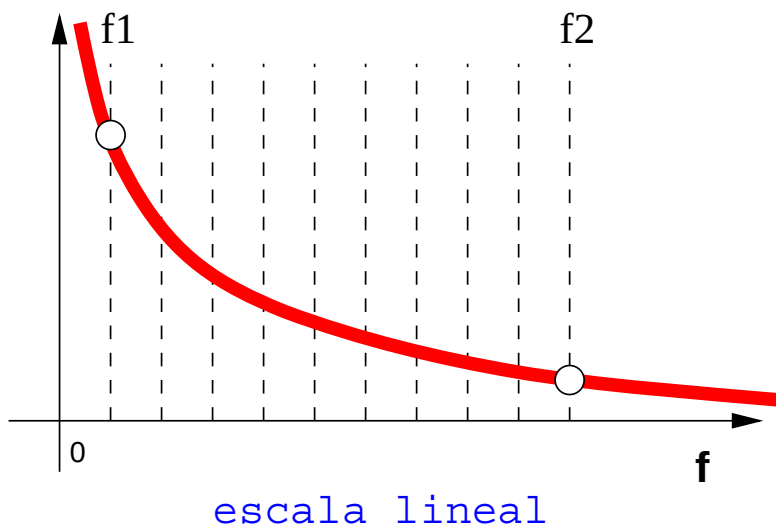
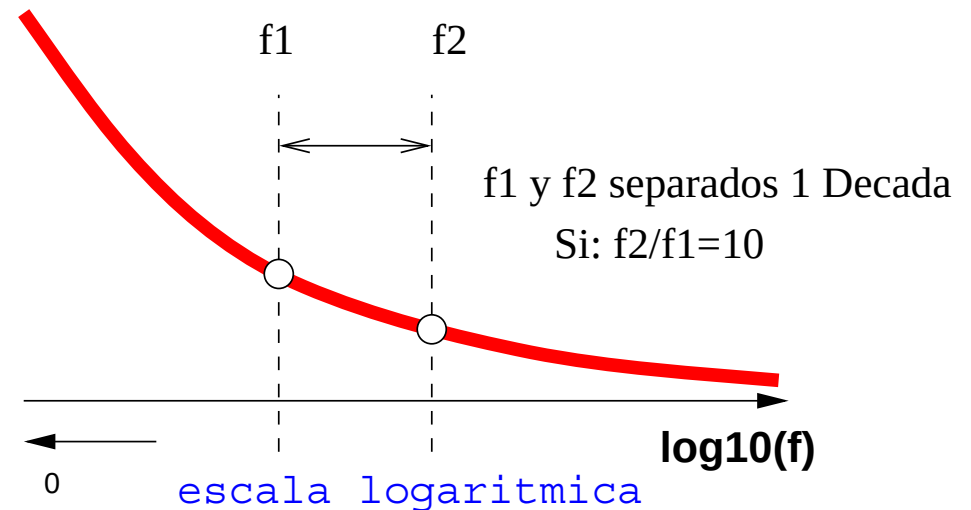
“Circuitos Electronicos”, Norbert R. Malik, Prentice Hall

“Microelectrónica”, Jacob Millman & Arvin Gravel, McGraw Hill

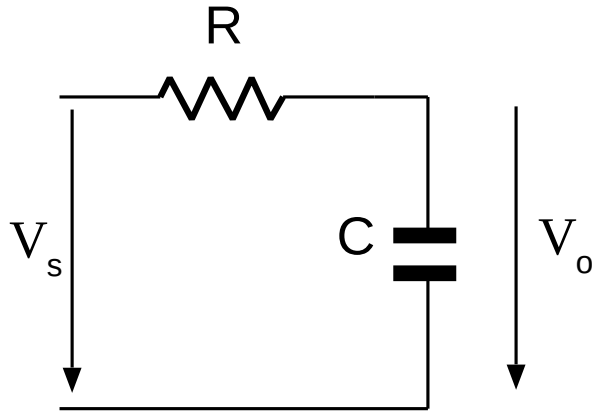
Capacidad en función de Frecuencia



- Impedancia compleja: $Z_c = \frac{1}{j\omega C}$
- Dependencia con la frecuencia: $|Z_c| = \frac{1}{2\pi f C}$
 - Circuito abierto a bajas frecuencias:
 $\lim_{f \rightarrow 0} |Z_c| = \infty$
 - Cortocircuito a altas frecuencias:
 $\lim_{f \rightarrow \infty} |Z_c| = 0$



Resolución circuito RC: temporal



Ecuaciones en el dominio del tiempo:

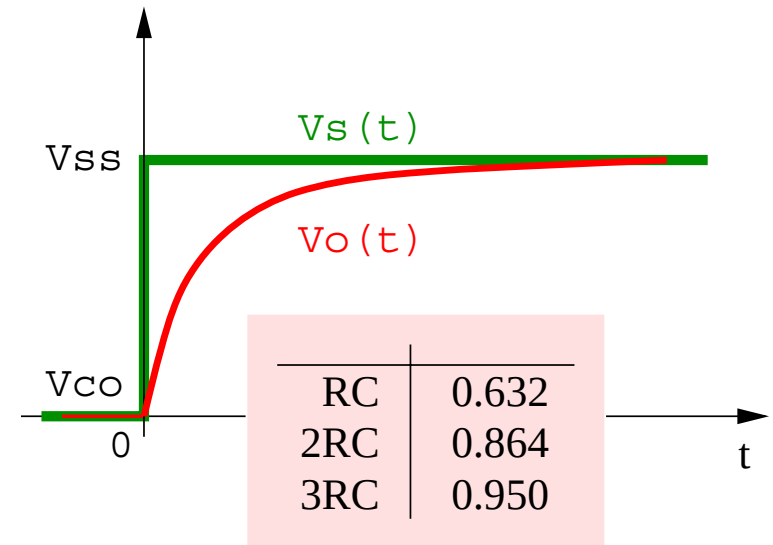
$$V_s(t) = RC \frac{d}{dt} V_o(t) + V_o(t)$$

$$V_o(t_o) = V_{co}$$

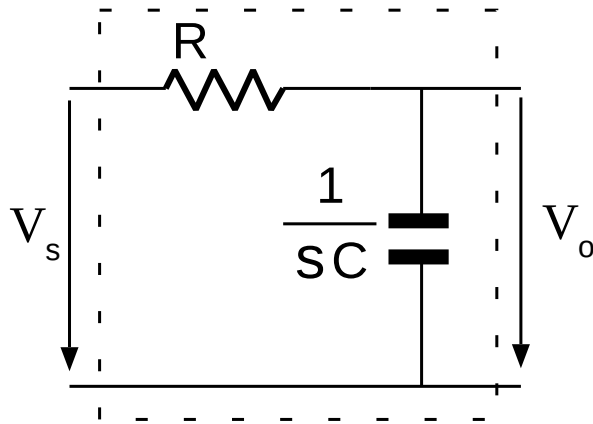
Suponiendo $V_s(t)$ un escalón de amplitud V_{ss} y resolviendo:

$$V_o(t) = V_{ss} + (V_{co} - V_{ss}) e^{-\frac{t}{RC}}$$

- * Es necesario conocer $V_s(t)$ para obtener $V_o(t)$
- * Qué ocurre si $V_s(t)$ no es un escalón ?



Resolución circuito RC: Laplace



Ecuaciones en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned}
 U_o(s) &= U_s(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \\
 &= U_s(s) \frac{1}{1 + sRC} = U_s(s) H(s)
 \end{aligned}$$

La **función de transferencia** $H(s)$ permite analizar el comportamiento del circuito, **sin tener en cuenta la entrada** $V_s(t)$

Es conveniente trasladar las **especificaciones** en el *dominio del tiempo* al *dominio de la frecuencia*

Función de Transferencia: POLO

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/p} : p \in \mathbb{R}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \right)$$

$$\omega \ll p \quad |*|_{dB} \simeq 0$$

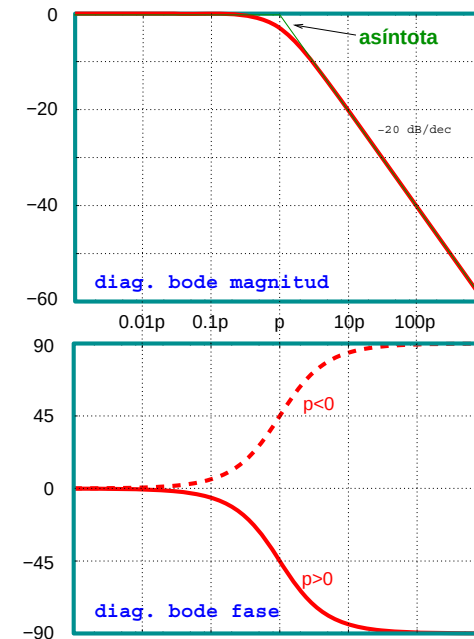
$$\omega \gg p \quad |*|_{dB} \simeq -20 \log_{10} (\omega/p)$$

$$\omega = p \quad |*|_{dB} = -10 \log_{10} (2) \simeq -3dB$$

$$\varphi [H(j\omega)] = -\text{sgn}(p) \text{atan} (\omega/|p|)$$

$$\omega \ll p \quad \varphi(*) \simeq 0$$

$$\omega \gg p \quad \varphi(*) \simeq -\text{sgn}(p) 90$$



Función de Transferencia: CERO

$$H(s) = 1 + s/z : z \in \mathbb{R}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{z} \right)^2} \right)$$

$$\omega \ll z \quad |*|_{dB} \simeq 0$$

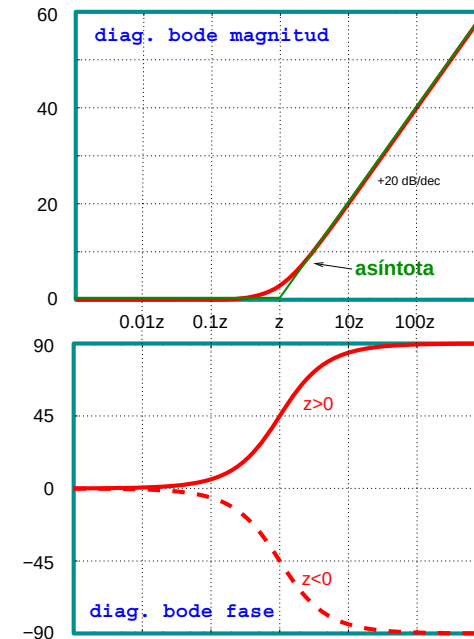
$$\omega \gg z \quad |*|_{dB} \simeq 20 \log_{10} (\omega/z)$$

$$\omega = z \quad |*|_{dB} = 10 \log_{10} (2) \simeq 3dB$$

$$\varphi [H(j\omega)] = \text{sgn}(z) \text{atan} (\omega/|z|)$$

$$\omega \ll z \quad \varphi(*) \simeq 0$$

$$\omega \gg z \quad \varphi(*) \simeq \text{sgn}(z) : 90$$



Función de Transferencia: Genérica

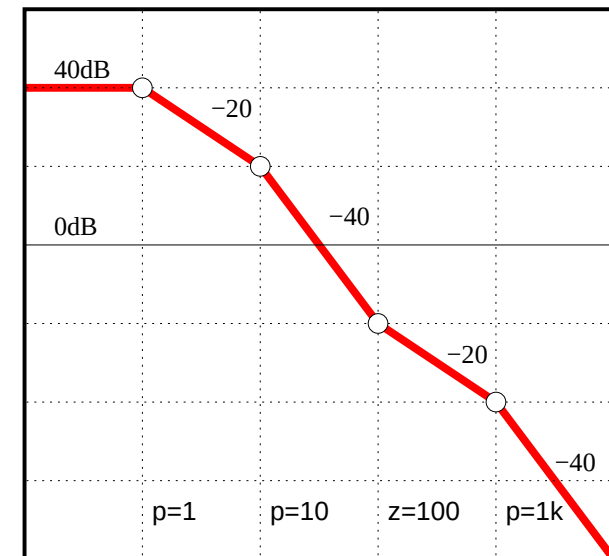
$$H(s) = \frac{s^{N_{z1}} \prod_{k=1}^{N_{z2}} \left(1 + \frac{s}{z_k}\right)}{\prod_{m=1}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{p_m}\right)}$$

Para que un sistema sea **realizable** es necesario que:
 $N_p > N_z$, de forma que $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$

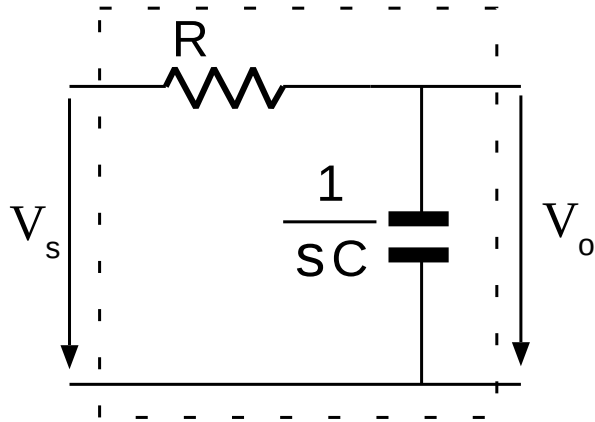
Ejercicio

Dibujar la aproximación asintótica de:

$$|H(s)| = \frac{100 (1 + s/100)}{(1 + s)(1 + s/10)(1 + s/1k)}$$

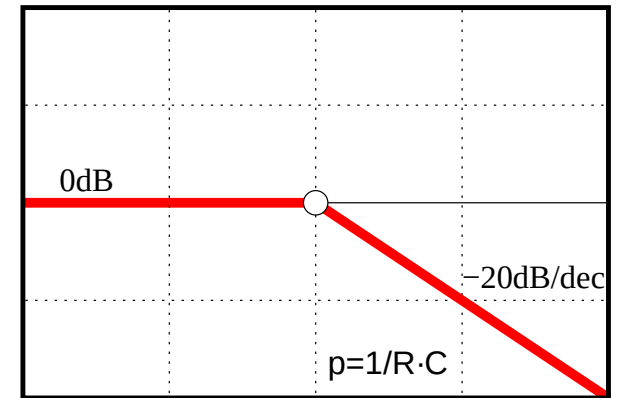
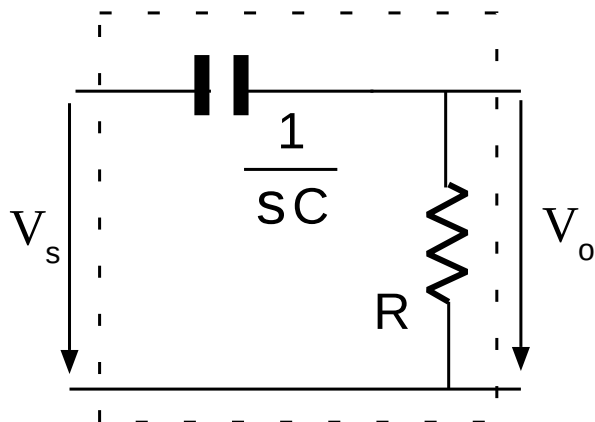


Función de Transferencia: Circuito RC



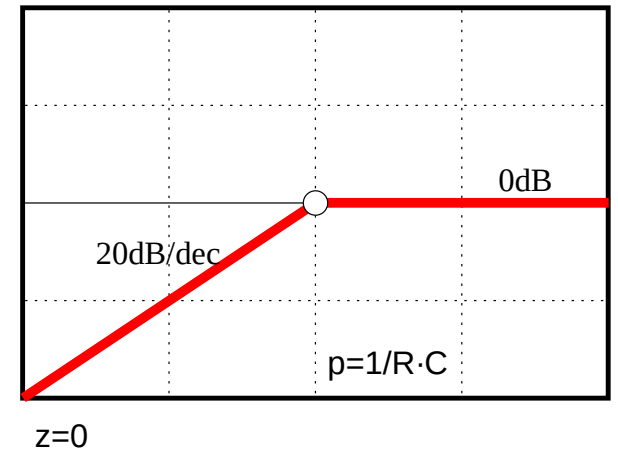
Circuito PasoBajo (LP)

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{1/RC}}$$



Circuito PasoAlto (HP)

$$H(s) = \frac{\frac{s}{1/RC}}{1 + \frac{s}{1/RC}}$$

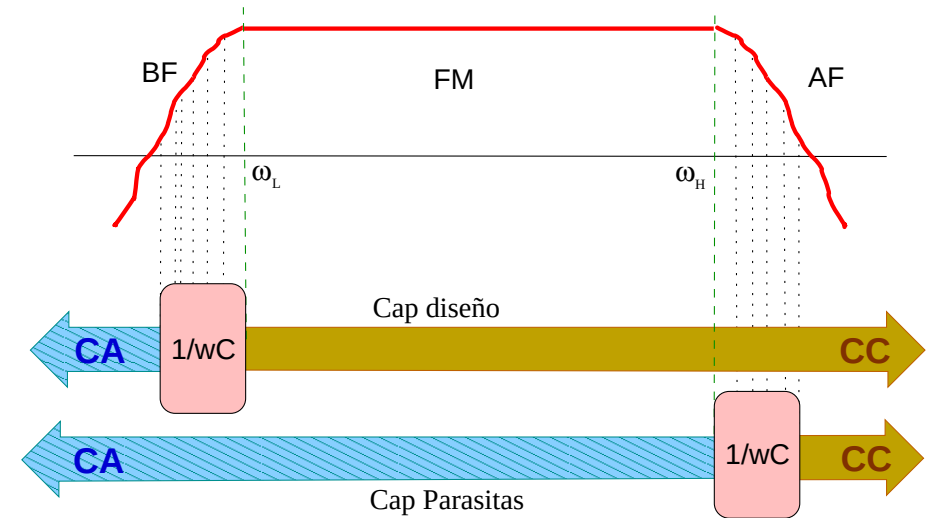


Amplificadores Banda-Ancha

- Capacidades Parásitas, pF ó fF
- Capacidades Diseño, nF ó μF

Permite la descomposición:

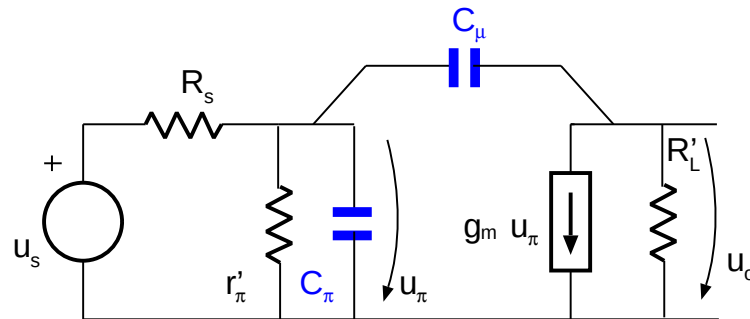
$$H(s) = H_{BF}(s) H_{FM} H_{AF}(s)$$



- $H_{AF}(s)$, es de tipo LP y es provocada por las capacidades parásitas. ω_H
- $H_{BF}(s)$, es de tipo HP y es provocada por las capacidades de diseño. ω_L
- H_{FM} , es una constante que representa la ganancia en la banda de paso.
- La zona de trabajo es $BW = \omega_H - \omega_L$

Respuesta en AF: Método de Nudos

Planteamos las ecuaciones de nudos en Laplace:



modelo pequeña señal-AF

$$\begin{aligned} u_{\pi} \left(\frac{1}{R} + s(C_{\pi} + C_{\mu}) \right) - u_o s C_{\mu} &= u_s \frac{1}{R_s} \\ u_o \left(\frac{1}{R_L} + s C_{\mu} \right) - u_{\pi} s C_{\mu} &= -g_m u_{\pi} \\ R &= R_s || r_{\pi}; R_L = R_c || r_o \end{aligned}$$

Resolvamos para obtener u_o/u_s

$$\begin{aligned} \frac{u_o}{u_{\pi}} &= \frac{-g_m + s C_{\mu}}{\frac{1}{R_L} + s C_{\mu}} \\ \frac{u_o}{u_s} &= \frac{\frac{1}{R_s} (-g_m + s C_{\mu})}{\left(\frac{1}{R_L} + s C_{\mu} \right) \left(\frac{1}{R} + s (C_{\mu} + C_{\pi}) \right) - s C_{\mu} (-g_m + s C_{\mu})} \\ &= \frac{-g_m r_{\pi} R_L}{R_s + r_{\pi}} \frac{1 - s \frac{C_{\mu}}{g_m}}{s^2 C_{\mu} C_{\pi} R_L R + s R \left(C_{\pi} + C_{\mu} \left(\frac{R_L}{R} + 1 + g_m R_L \right) \right) + 1} \end{aligned}$$

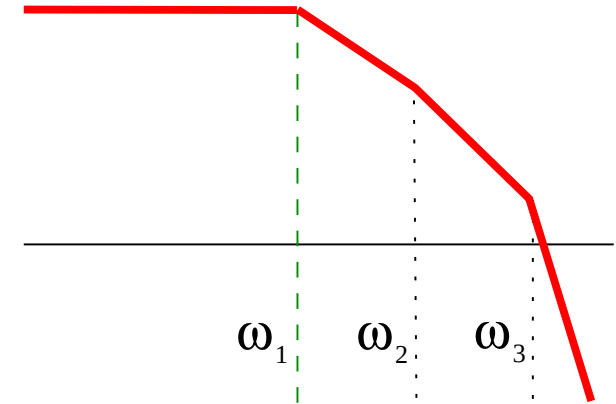
$$\begin{aligned}
 H(s) = \frac{U_o}{U_s} &= A_{vo} \frac{1 - s/\omega_{z1}}{(1 - s/\omega_{p1})(1 - s/\omega_{p2})} \\
 A_{vo} &= \frac{-g_m r_\pi R_L}{R_s + r_\pi} \\
 \omega_{z1} &= \frac{g_m}{C_\mu} \\
 \omega_{p1} &\simeq \frac{1}{R} \frac{1}{C_\pi + C_\mu \left(\frac{R_L}{R} + 1 + g_m R_L \right)} \\
 \omega_{p2} &\simeq \frac{C_\pi + C_\mu \left(\frac{R_L}{R} + 1 + g_m R_L \right)}{C_\pi C_\mu R_L} = \frac{1}{C_\mu R_L} + \frac{1}{C_\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L} + g_m \right)
 \end{aligned}$$

- Hemos obtenido la función de transferencia completa: todos los polos y ceros
- Sólo necesitábamos el primer polo: ω_H
- Inmanejable si tenemos más de 2 polos (1 transistor)

Respuesta en AF: Simplificación polo dominante

Estamos interesados en obtener sólo el límite superior (ω_H), que es un polo.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots} \\
 &= \frac{1}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_3)\dots}
 \end{aligned}$$



Para un denominador de orden 3:

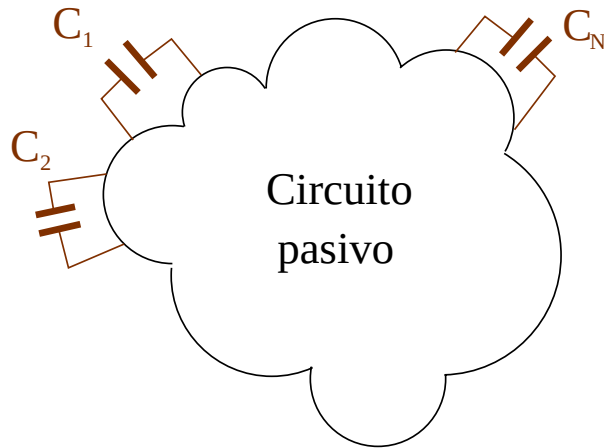
$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1/\omega_1 + 1/\omega_2 + 1/\omega_3 \\
 a_2 &= 1/(\omega_1 \omega_2) + 1/(\omega_1 \omega_3) + 1/(\omega_2 \omega_3) \\
 a_3 &= 1/(\omega_1 \omega_2 \omega_3)
 \end{aligned}$$

Hipótesis del Polo dominante

$$\begin{aligned}
 \text{Sup. } \omega_1 \ll \omega_2 \dots &\Rightarrow \omega_1 \simeq 1/a_1 \\
 \text{Sup. } \omega_2 \ll \omega_3 \dots &\Rightarrow \omega_2 \simeq a_1/a_2
 \end{aligned}$$

Respuesta en AF: Método Constantes de Tiempo

Para un circuito de N **capacidades parásitas** :



$$a_1 = \sum_{k=1}^{k=N} R_k^o C_k$$

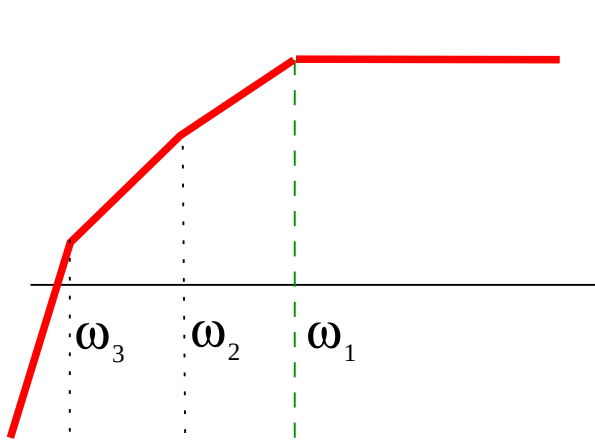
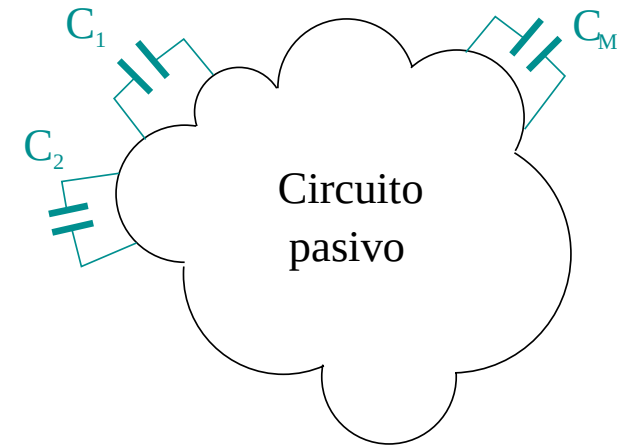
$$a_2 = \sum_{k=1}^{k=N-1} R_k^o C_k \sum_{j=k+1}^{j=N} R_j^k C_j$$

- R_k^o : resist-Thev. desde C_k , si resto de cap-parásitas son CA
- R_j^k : resist-Thev. desde C_j , si resto de cap-parásitas son CA, salvo C_k que es CC

Si se puede aplicar polo dominante:

$$\omega_H \simeq \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=N} R_k^o C_k}$$

Respuesta en BF: Método Constantes de Tiempo



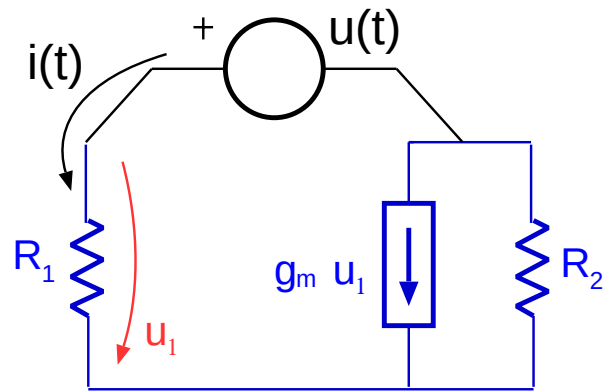
El límite frecuencial inferior (ω_L) para un sistema con M **capacidades de diseño** :

$$\omega_L \simeq \sum_{i=1}^{i=M} \frac{1}{R_i^\infty C_i}$$

R_i^∞ : resist-Thev. desde C_i , si resto de cap-diseño son CC

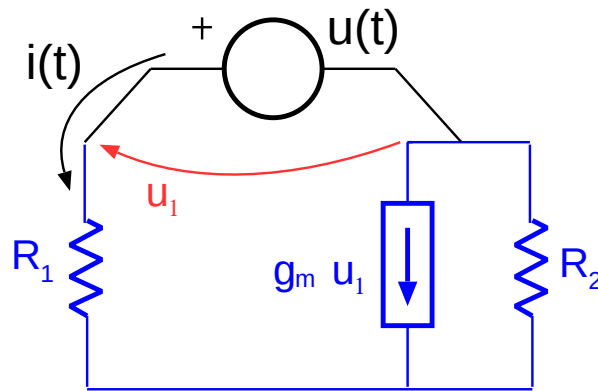
Thevenin más empleados

- Resistencias serie: $u/i = R_1 + R_2$
- Resistencias paralelo: $u/i = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



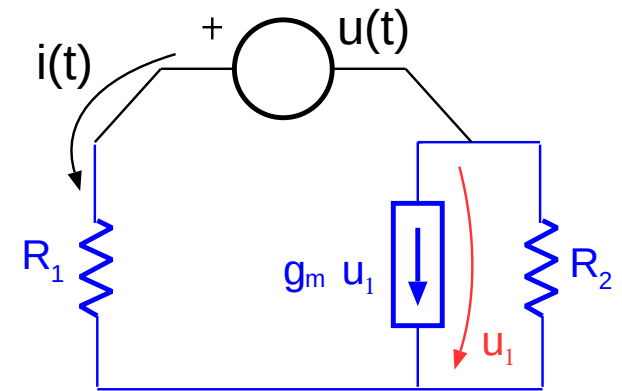
topología A

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{i(t)} &= R_1 + (1 + g_m R_1) R_2 \\ &= R_2 + (1 + g_m R_2) R_1 \end{aligned}$$



topología B

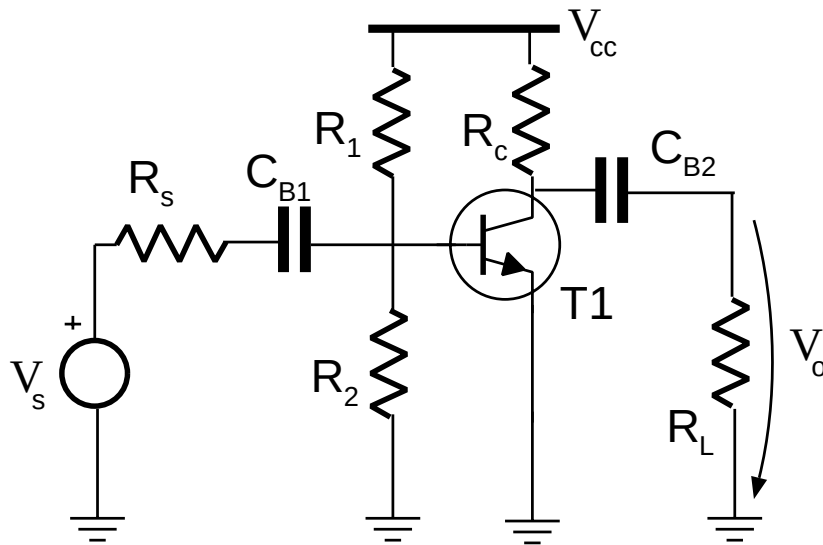
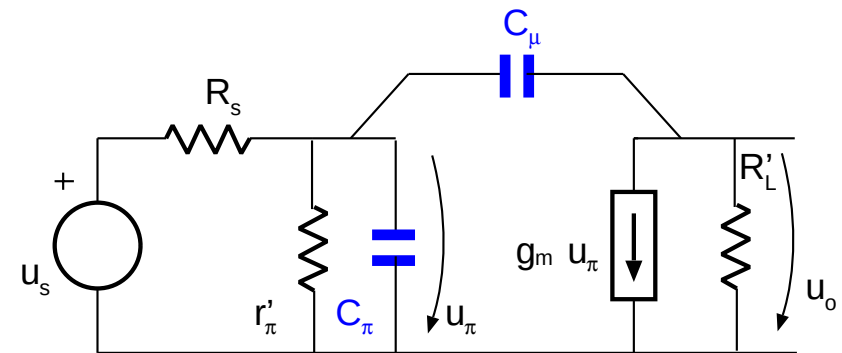
$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{R_1 + R_2}{1 + g_m R_2}$$



topología C

$$\frac{u(t)}{i(t)} = R_1 + (R_2 || \frac{1}{g_m})$$

Ejercicio en AF



modelo pequeña señal-AF

$$R_\pi^o = R$$

$$R_\mu^o = R + (1 + g_m R) R'_L$$

$$R_\mu^\pi = R_L$$

Donde : $r'_\pi = R_1 || R_2 || r_\pi$

$$R = R_S || r'_\pi$$

$$R'_L = R_C || R_L || r_o$$

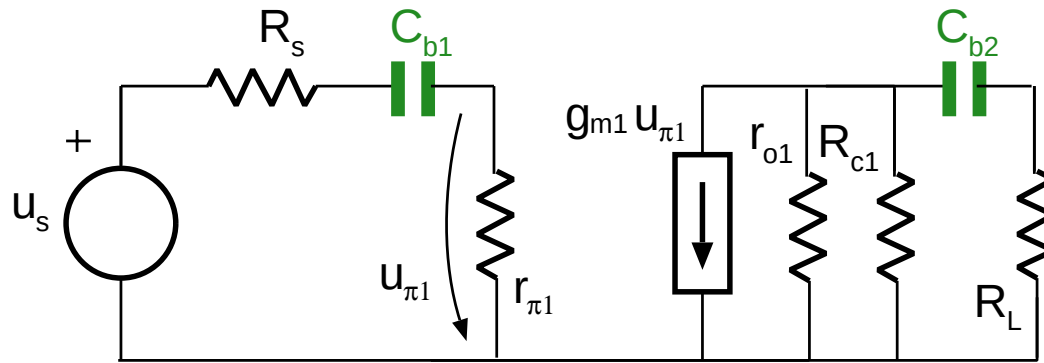
$$a_1 = R_\pi^o C_\pi + R_\mu^o C_\mu$$

$$a_2 = R_\pi^o C_\pi R_\mu^\pi C_\mu$$

$$\omega_H = \omega_1 \simeq \frac{1}{a_1} = \frac{1}{R_\pi^o C_\pi + R_\mu^o C_\mu}$$

$$\text{Sup } \omega_1 \gg \omega_2$$

Ejercicio en BF



modelo pequeña señal-BF

$$R_{B1}^{\infty} = R_s + (R_1 || R_2 || r_{\pi})$$

$$R_{B2}^{\infty} = r_{o1} || R_{C1} + R_L$$

$$\omega_L = \omega_1 \simeq \frac{1}{R_{B1}^{\infty} C_{B1}} + \frac{1}{R_{B2}^{\infty} C_{B2}}$$