

TEMA 4. REALIZACIÓN DE RESISTENCIAS CON CAPACIDADES CONMUTADAS

- 4.1. Introducción..... 1
- 4.2. Resistencia equivalente de una capacidad conmutada..... 1
- 4.3. Circuitos RC equivalentes con capacidades conmutadas..... 4
 - 4.3.1. Con el Circuito Paralelo..... 5
 - 4.3.2. Otras configuraciones..... 9
- Referencias 12

4.1. Introducción.

En este tema introducimos los circuitos de capacidades conmutadas (en inglés *Switched Capacitor*, SC). Durante años los circuitos SC han sido dominantes en el procesamiento analógico integrado en tecnología CMOS y aún lo siguen siendo. Varias son las causas de ello. En primer lugar, como veremos más adelante, las frecuencias características en un circuito SC pueden ser realizadas con gran precisión, ya que vienen determinadas por la frecuencia de una señal de reloj y por un cociente entre capacidades. Además, en este mismo tema veremos que los circuitos SC pueden hacerse estructuralmente insensibles a parásitos. Por último, las técnicas SC son ampliamente conocidas y han demostrado en numerosas aplicaciones ser muy robustas y fiables.

Este tema introductorio nos muestra cómo un circuito SC puede reemplazar a una resistencia en un circuito RC examinando la validez de las aproximaciones.

4.2. Resistencia equivalente de una capacidad conmutada.

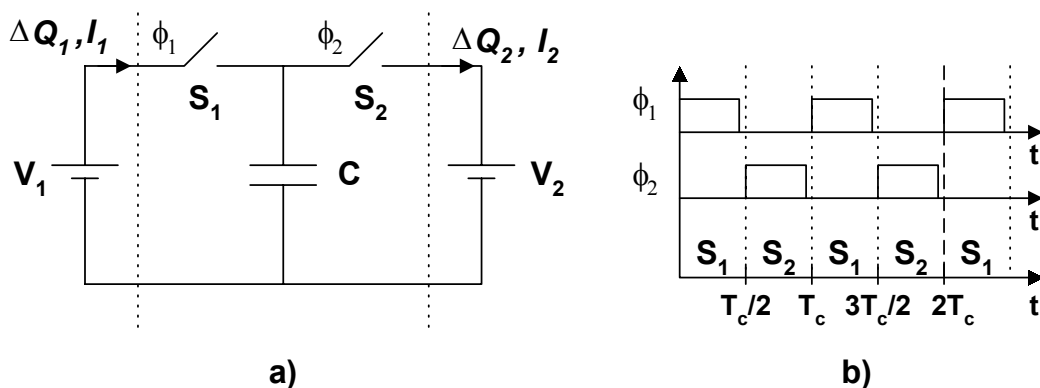


Figura 4.1. a) Circuito SC emulando una resistencia. b) Señales de reloj

Consideremos el circuito de la figura 4.1a suponiendo interruptores ideales dirigidos por dos señales de reloj no solapantes cuyas formas de onda aparecen en la figura 4.1b. Suponemos que sólo cuando la señal de reloj está en nivel alto el interruptor correspondiente está cerrado.

Para nuestro análisis partimos de condensador descargado. Después del primer semiperiodo, el condensador C quedará cargado a la tensión V_1 , por lo que la carga del condensador en $t = T_C/2$ vendrá dada por $Q_C\left(\frac{T_C}{2}\right) = CV_1$.

- Entre $T_C/2$ y T_C , ϕ_2 está activo, S_2 cerrado, y C queda unido a V_2 , por lo que:

$$Q_C(T_C) = CV_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta Q_1\left(\frac{T_C}{2}, T_C\right) = 0 \\ \Delta Q_2\left(\frac{T_C}{2}, T_C\right) = C \cdot (V_1 - V_2) \end{cases} \quad (4.1)$$

(Según el criterio de la figura 4.1a)

- Aún resta medio ciclo más para alcanzar el régimen permanente:

$$Q_C\left(\frac{3T_C}{2}\right) = CV_1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta Q_1\left(T_C, \frac{3T_C}{2}\right) = C \cdot (V_1 - V_2) \\ \Delta Q_2\left(T_C, \frac{3T_C}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Este funcionamiento se repite en los ciclos siguientes.

En el periodo $T_C/2 \leq t < 3T_C/2$ hay un intercambio de carga entre la capacidad C y la fuente V_1

$$\Delta Q_1\left(\frac{T_C}{2}, \frac{3T_C}{2}\right) = \Delta Q_1\left(\frac{T_C}{2}, T_C\right) + \Delta Q_1\left(T_C, \frac{3T_C}{2}\right) = 0 + C \cdot (V_1 - V_2) = C \cdot (V_1 - V_2) \quad (4.3)$$

Esta carga se transfiere en forma de pulsos de corriente I_1 . Podemos obtener su valor medio $I_{1MEDI A}$ promediando a lo largo de un periodo

$$I_{1MEDI A} = \frac{1}{T_C} \cdot \Delta Q_1\left(\frac{T_C}{2}, \frac{3T_C}{2}\right) = \frac{1}{T_C} \cdot C \cdot (V_1 - V_2) = f_C \cdot C \cdot (V_1 - V_2) \quad (4.4)$$

De igual manera

$$\begin{aligned}
 I_{2\text{MEDIA}} &= \frac{1}{T_C} \cdot \Delta Q_2 \left(\frac{T_C}{2}, \frac{3T_C}{2} \right) = \frac{1}{T_C} \cdot \left(\Delta Q_2 \left(\frac{T_C}{2}, T_C \right) + \Delta Q_2 \left(T_C, \frac{3T_C}{2} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{T_C} \cdot (C \cdot (V_1 - V_2) + 0) = f_c \cdot C \cdot (V_1 - V_2) = I_{1\text{MEDIA}} = I_{\text{MEDIA}} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

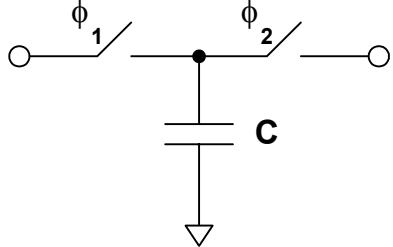
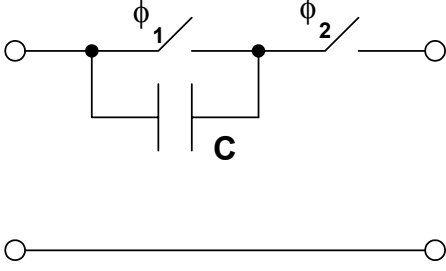
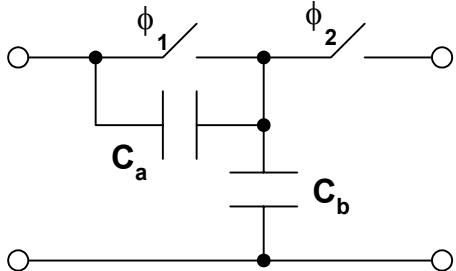
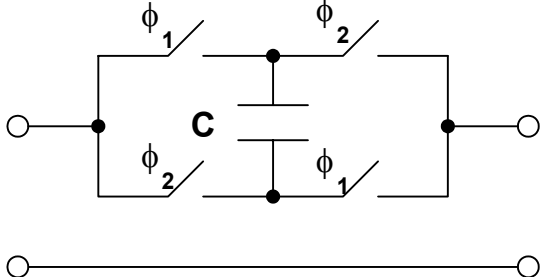
Configuración	Circuito	R_{eq}
PARALELO		T_c/C
SERIE		T_c/C
SERIE-PARALELO		$T_c/(C_a + C_b)$
BILINEAL		$T_c/4C$

Tabla 4.1. Configuraciones de circuitos SC y su resistencia equivalente

Por tanto, el circuito de la figura 4.1 se comporta, en valor medio, como una resistencia de valor

$$R_{eq} = \frac{V_1 - V_2}{I_{\text{MEDIA}}} = \frac{1}{C \cdot f_c} \quad (4.6)$$

Otras configuraciones que simulan una resistencia con capacidades conmutadas se muestran en la Tabla 4.1.

4.3. Circuitos RC equivalentes con capacidades conmutadas.

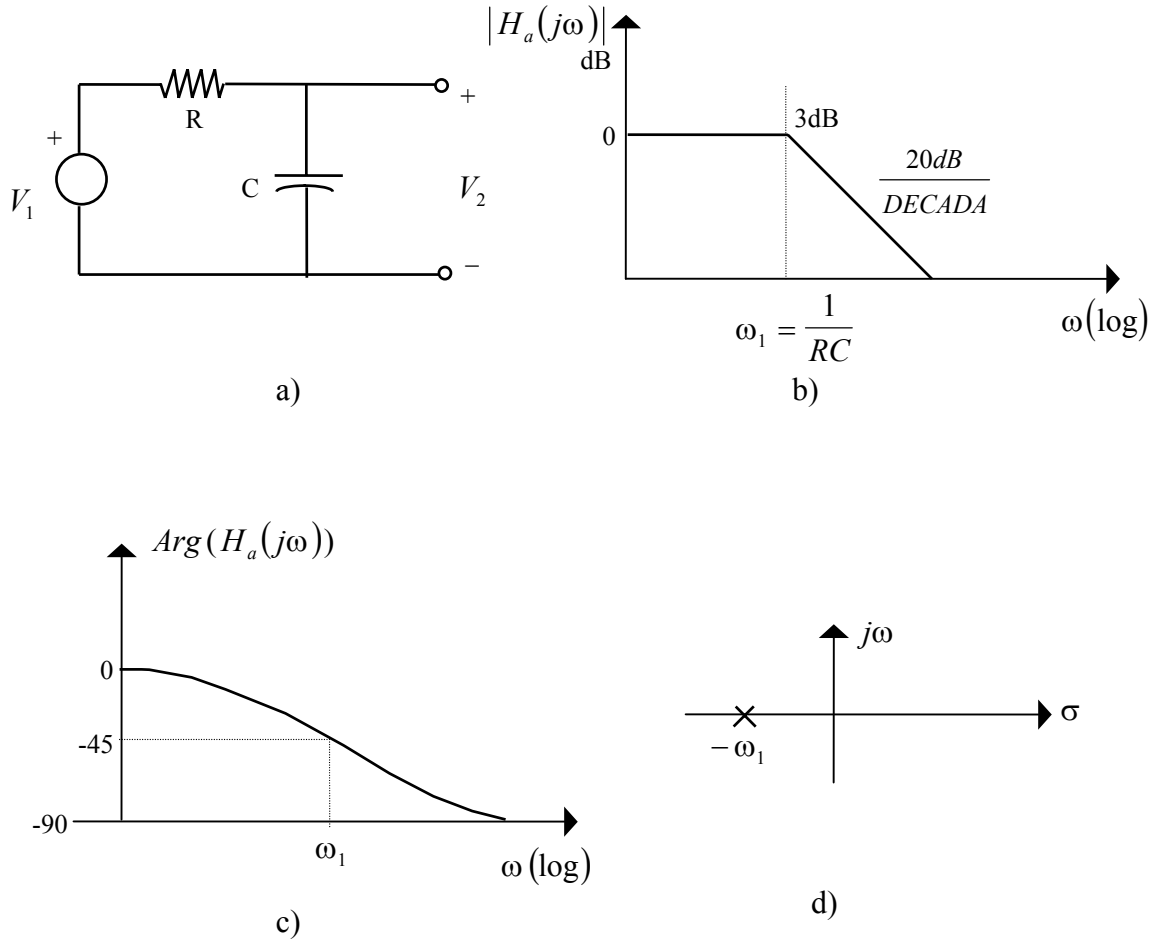


Figura 4.2. a) Circuito pasivo RC. b) Módulo y c) argumento de la función de transferencia. d) Diagrama de polos y ceros.

Consideremos un circuito pasivo RC (figura 4.2a), cuya función de transferencia viene dada por

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + s/\omega_1} \tag{4.7}$$

Las figuras 4.2b y 4.2c presentan de manera gráfica su módulo y argumento.

$$|H_a(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad Arg(H_a(j\omega)) = -\arctan(\omega RC) \tag{4.8}$$

La figura 4.d nos muestra la posición de sus polos y ceros en el plano s , mostrando un único polo en $-\omega_1$

4.3.1. Con el Circuito Paralelo

Vamos a simular el comportamiento del anterior circuito reemplazando la resistencia por una capacidad conmutada equivalente.

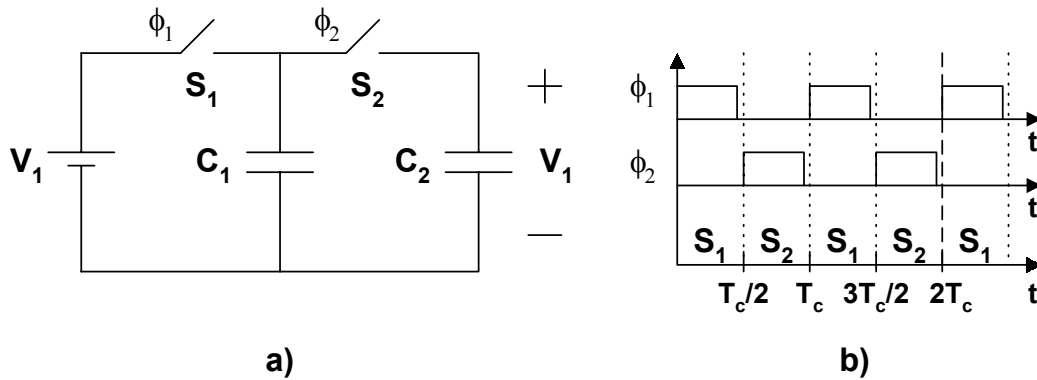


Figura 4.3. Circuito SC paralelo equivalente a un circuito pasivo RC.

Consideramos dos fases de reloj no solapantes activas en los semi-intervalos que aparecen en la figura 4.3b. Suponemos que los interruptores son ideales, por lo que las cargas y descargas de los condensadores son instantáneas.

En cada periodo $n \cdot T_C \leq t < (n + 1) \cdot T_C$ distinguimos dos semiperiodos:

- *Semiperiodo Impar* (superíndice o , fase ϕ_1 activa)

$$n \cdot T_C \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot T_C \quad \text{referido como intervalo o semiperiodo } n$$

- *Semiperiodo Par* (superíndice e , fase ϕ_2 activa)

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot T_C \leq t < (n + 1) \cdot T_C \quad \text{referido como intervalo o semiperiodo } (n+1/2)$$

En el semiperiodo impar $(n - 1)$, S_1 está cerrado y S_2 está abierto, por lo que:

$$V_{C_1}^o(n-1) = V_1^o(n-1) \quad \text{y} \quad V_2^o(n-1) = V_{C_2}^o(n-1) = V_2^e\left(n - \frac{3}{2}\right) \quad (4.9)$$

En el semiperiodo par $n - 1/2$, S_2 está cerrado y por aplicación del principio de superposición:

$$V_2^e\left(n - \frac{1}{2}\right) = V_2^o(n-1) \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} + V_1^o(n-1) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (4.10)$$

En el siguiente semiperiodo n , ϕ_2 está nuevamente abierto por lo que,

$$V_2^o(n) = V_2^e\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.11) tenemos:

$$V_2^o(n) = V_2^o(n-1) \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} + V_1^o(n-1) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (4.12)$$

Aplicando transformada en z :

$$V_2^o(z) = z^{-1} \cdot V_2^o(z) \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} + z^{-1} \cdot V_1^o(z) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (4.13)$$

y, despejando

$$H^{oo}(z) = \frac{V_2^o(z)}{V_1^o(z)} = \frac{\frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot z^{-1}}{1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot z^{-1}} \quad (4.14)$$

con $\alpha = C_2/C_1$ (4.15)

Donde, de una forma genérica, se ha definido

$$H^{xy}(z) = \frac{V_2^y(z)}{V_1^x(z)} \text{ con } x, y \in (o, e) \quad (4.16)$$

Podemos ver en la figura 4.4. la posición de los polos y ceros de $H^{oo}(z)$ en el plano z .

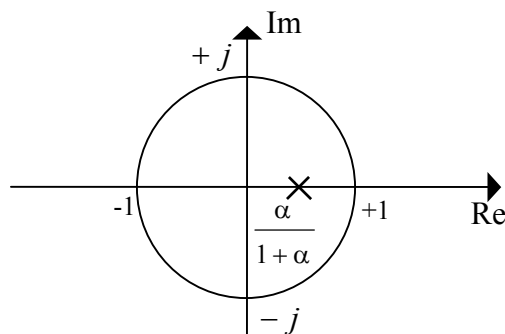


Figura 4.4. Polos y ceros de $H^{oo}(z)$ en el plano z .

También podíamos haber sustituido (4.9) en (4.10), obteniendo $H^{oe}(z)$:

$$V_2^e\left(n - \frac{1}{2}\right) = V_2^e\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} + V_1^o(n-1) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (4.17)$$

$$H^{oe}(z) = \frac{V_2^e(z)}{V_1^o(z)} = \frac{\frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot z^{-1/2}}{1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \frac{z^{-1/2}}{1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot z^{-1}} = z^{1/2} \cdot H^{oo}(z) \quad (4.18)$$

Fijémonos de nuevo en $H^{oo}(z)$. Para comparar el comportamiento en frecuencia del circuito SC de la figura 4.3 con el comportamiento en frecuencia del circuito pasivo RC de la figura 4.2, sustituimos z por $e^{j\omega T_c}$ en (4.14) y s por $j\omega$ en (4.7) y comparamos los resultados.

$$H^{oo}(e^{j\omega T_c}) = \frac{1}{(1 + \alpha) \cdot e^{j\omega T_c} - \alpha} \quad (4.19)$$

$$H_a(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC} \quad (4.20)$$

Las dos expresiones son equivalentes si $e^{j\omega T_c}$ se sustituye por $1 + j\omega T_c$, que es la aproximación Euler progresiva (Forward Euler, F.E.): $z \rightarrow 1 + sT_c$

En ese caso, igualando coeficientes

$$(1 + \alpha) \cdot T_c = RC = \frac{1}{\omega_1} \Rightarrow \alpha = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{\omega_1 \cdot T_c} - 1 \quad (4.21)$$

Podemos examinar la validez de la aproximación de Euler progresiva en este caso, comparando el comportamiento en frecuencia del módulo y el argumento de las expresiones (4.19) y (4.20). Para ello hacemos en (4.19) $e^{j\omega T_c} = \cos\omega T_c + j\sin\omega T_c$

$$H^{oo}(e^{j\omega T_c}) = \frac{1}{(1 + \alpha) \cdot e^{j\omega T_c} - \alpha} = \frac{1}{[(1 + \alpha) \cdot \cos\omega T_c - \alpha] + (1 + \alpha) \cdot j\sin\omega T_c} \quad (4.22)$$

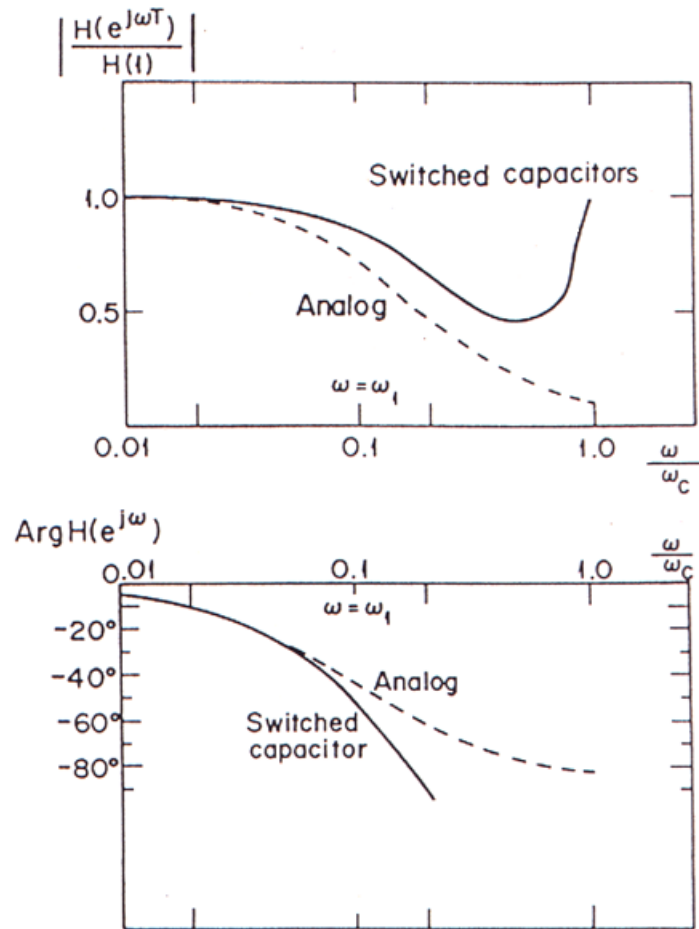


Figura 4.5. a) Módulo y b) argumento de las funciones de transferencia del circuito pasivo RC de la figura 4.2 (línea discontinua) para $\omega_1 = 0.1 \cdot \omega_c$ y del circuito SC de

la figura 4.3 (línea continua) para $\alpha = \frac{1}{\omega_1 \cdot T_C} - 1 = \frac{5}{\pi} - 1$.

separando módulo y argumento nos queda

$$\left| H^{oo}(e^{j\omega T_C}) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha \cdot (1 + \alpha) \cdot (1 - \cos\omega T_C)}} \quad (4.23)$$

$$\text{Arg}(H^{oo}(e^{j\omega T_C})) = -\arctg\left(\frac{\text{sen}\omega T_C}{\cos\omega T_C - \frac{\alpha}{1 + \alpha}} \right) \quad (4.24)$$

La figura 4.5 muestra el módulo y el argumento de la función de transferencia del circuito RC continuo en el tiempo para $\omega_1 = 0.1 \cdot \omega_c$, junto con los de la función de transferencia del circuito SC de la figura 4.3 descritos en las ecuaciones (4.23) y (4.24)

para $\alpha = \frac{1}{\omega_1 \cdot T_C} - 1 = \frac{5}{\pi} - 1$.

Puede observarse que, incluso para $\frac{\omega_1}{\omega_C} \ll 1$ (0.1 en nuestro caso), la aproximación sólo es válida en muy baja frecuencia $\omega \ll 0.5\omega_C$.

4.3.2. Otras configuraciones.

También puede emularse el funcionamiento de un circuito pasivo RC empleando circuitos SC con el resto de configuraciones de la Tabla 4.1. Dejamos para el lector la comprobación de los resultados.

a) Con el circuito serie

En este caso, la función de transferencia de interés es $H^{ee}(z)$

$$H^{eo}(z) = z^{-1/2} \cdot H^{ee}(z) \quad \text{y} \quad H^{ee}(z) = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot z^{-1}} \tag{4.25}$$

siendo $\alpha = C_2/C_1$ (4.26)

En este caso, la expresión $H^{ee}(e^{j\omega T_c})$ es equivalente a $H_a(j\omega)$ si:

$$e^{j\omega T_c} \rightarrow \frac{1}{1 - j\omega T_c} \tag{4.27}$$

que es la aproximación de Euler regresiva (Backward Euler, B.E.): $z \rightarrow \frac{1}{1 - sT}$

Sustituyendo e igualando coeficientes

$$\alpha = \frac{RC}{T_c} = \frac{1}{T_c \cdot \omega_1} \tag{4.28}$$

La figura 4.6. muestra la posición de los polos y ceros de la función de transferencia $H^{ee}(z)$ en el plano z , mostrando un cero en el origen y un polo en $\frac{\alpha}{1+\alpha}$

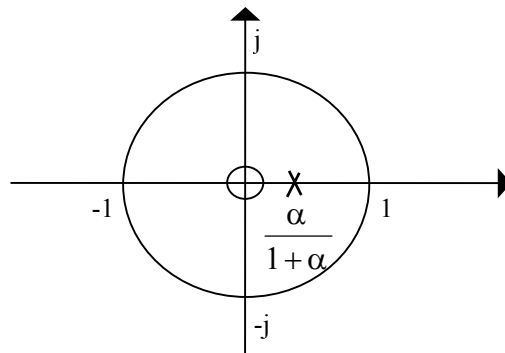


Figura 4.6. Polos y ceros de $H^{ee}(z)$

En cuanto al comportamiento en frecuencia, la magnitud que resulta es la misma que se obtuvo para el circuito SC paralelo (expresión (4.23) y parte superior de la figura 4.5). Sin embargo, el argumento es distinto, como podemos observar en la figura 4.7, donde se compara nuevamente con la fase del circuito RC continuo en el tiempo.

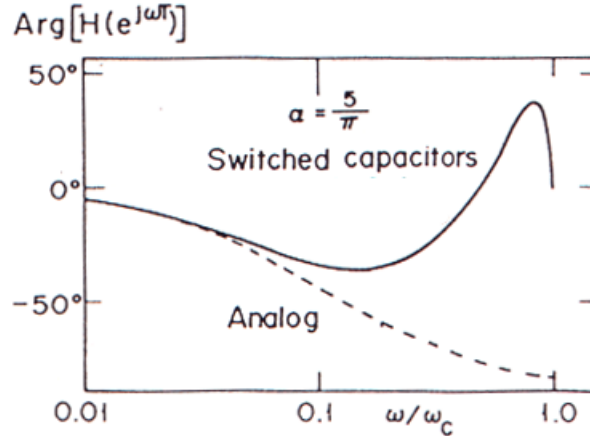


Figura 4.7. Argumento de $H^{ee}(e^{j\omega_c T})$ para $\alpha = \frac{5}{\pi}$ comparado con el argumento de la función de transferencia del circuito RC continuo en el tiempo (línea discontinua) con $\omega_1 = 0.1 \cdot \omega_c$

Nuevamente puede observarse que la aproximación tan sólo es válida para muy baja frecuencia. Como principal diferencia respecto del comportamiento del circuito SC paralelo, destacamos que el circuito serie adelanta respecto al circuito RC continuo en el tiempo (figura 4.7), mientras que el circuito paralelo atrasa (parte inferior de la figura 4.5).

b) Con el circuito serie-paralelo

Para el circuito SC serie-paralelo con $C_a = C_b = C_l / 2$, y suponiendo que la tensión de entrada sólo cambia en ϕ_2 , es decir, que $V_{in}^o(kT) = V_{in}^e((k-1/2)T)$,

$$H^{ee}(z) = \frac{1}{2(1+\alpha)} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot z^{-1}} \quad (4.29)$$

Ahora, la aproximación equivalente es: $s \rightarrow \frac{2}{T_c} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ (transformación bilineal)

Sustituyendo e igualando coeficientes

$$2\alpha = \frac{2}{\omega_1 \cdot T_c} - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega_1 \cdot T_c} - \frac{1}{2} \quad (4.30)$$

El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura 4.8. Hay un cero en -1 y un polo en $\frac{\alpha}{1+\alpha}$

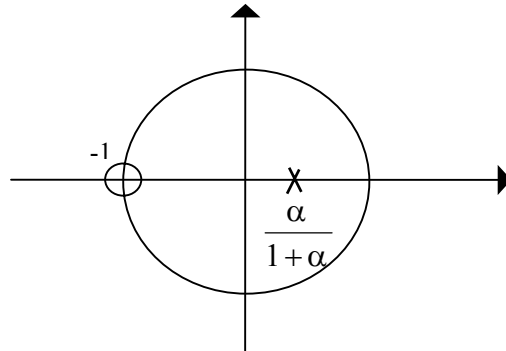


Figura 4.8. Posición de polos y ceros de la función de transferencia del circuito SC serie-paralelo en el plano z .

c) Con el circuito bilineal

Es fácil ver que este circuito funciona a una frecuencia que es doble de la de conmutación de los interruptores. Por ello, es conveniente definir $T_c' = T_c/2$. Con esta definición, es fácil ver que:

$$H(z') = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{1+z'^{-1}}{1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \cdot z'^{-1}} \tag{4.31}$$

La transformada equivalente ahora es la bilineal, con:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} = \frac{4}{\omega_1 T_c'} \tag{4.32}$$

El diagrama polos y ceros en el plano z' se muestra en la figura 4.9.

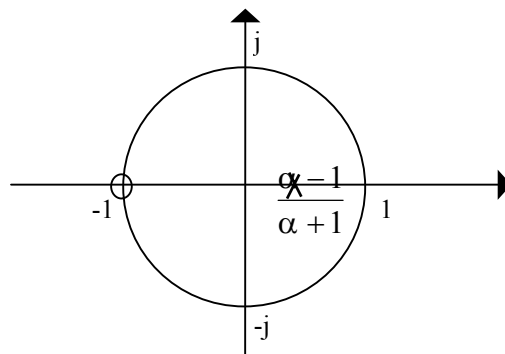


Figura 4.9. Diagrama de polos y ceros para el circuito SC bilineal.

Referencias

- [1] P.E. Allen, E.Sánchez-Sinencio. “*Switched Capacitor Circuits*”. Van Nostrand-Reinhold, New York: 1984.
- [2] R.Gregorian, G.Temes. “*Analog Integrated Circuits for Signal Processing*”. Wiley-Interscience, New York: 1986.
- [2] R.L. Geiger, P.E. Allen, N.R. Strader. “*VLSI design techniques for analog and digital circuits*”. McGraw-Hill, New York: 1990.
- [3] K.R. Laker, W.M.C. Sansen. “*Design of Analog Circuits and Systems*”. McGraw-Hill International Editions, New York: 1994.